

盘形铣刀加工等基圆锥齿轮的原理及齿面求解

王 斌¹, 邓效忠², 党玉功¹, 李天兴², 李更更²

(1. 西北工业大学 机电学院, 西安 710072;

2. 河南科技大学 机电工程学院, 河南 洛阳 471003)

摘 要: 为了实现等基圆锥齿轮的高速、高效加工, 基于等基圆锥齿轮理论, 分析了盘形铣刀加工等基圆锥齿轮的可行性, 建立了盘形铣刀数学模型、盘形铣刀加工坐标系, 分析并确立了各坐标系间的转换关系. 通过刀具曲面与齿面在共轭接触点处啮合方程的建立及求解, 得到了盘形铣刀加工的等基圆齿面表达式. 对盘形铣刀加工理论下的等基圆锥齿轮齿面与理论等基圆齿面进行了分析比较, 进行了盘形铣刀的仿真加工. 结果表明: 通过盘形铣刀截形、盘形铣刀加工运动中的回转角度、倾斜角度及倾斜中心点的合理设计, 盘形铣刀加工而成的实际齿面与理论齿面的接近程度达到工程要求, 使用盘形铣刀可以加工等基圆锥齿轮.

关 键 词: 等基圆锥齿轮; 盘形铣刀; 加工原理; 齿面方程; 仿真加工

中图分类号: V232.8; TG506

文献标志码: A

Processing principle and tooth surface determination of equal base circle bevel gear using disc cutter

WANG Bin¹, DENG Xiao-zhong², DANG Yu-gong¹,

LI Tian-xing², LI Geng-geng²

(1. School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. School of Mechatronics Engineering, Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan 471003, China)

Abstract: The equal base circle bevel gear was machined with a disc cutter. Based on the equal base circle bevel gear theory, its feasibility was analyzed, the mathematical model of the disc cutter was established; then the processing coordinate system of this special bevel gear was constructed based on disc cutter, while the mutual transformation of the cutting coordinate system was analyzed and obtained. The expression of tooth surface was obtained through solving the meshing equation of conjugate contact point when cutting this gear with a disk cutter. This new tooth surface was compared with a theoretical tooth surface based on finger cutter theory, and the machining and the theoretical tooth surface are simulated. The results show that: by reasonable design of the disc cutter section shape, the rotary angle in machining, the tilt angle and tilt center in machining, the actual tooth surface using disc cutter machining and the theoretical tooth surface are similar to the meet engineering requirements, and the equal base circle bevel gear can be processed using disc cutter.

收稿日期: 2013-01-05

基金项目: 国家自然科学基金(50675061)

作者简介: 王斌(1970—), 男, 陕西武功人, 副教授, 博士生, 主要从事数控装备、先进制造技术研究.

通信简介: 邓效忠(1957—), 男, 河南洛阳人, 教授、博士生导师, 博士, 主要从事机械传动理论及先进制造技术研究.

E-mail: DXZ01@163.com

Key words: equal base circle bevel gear; disc cutter; processing principle; tooth surface equation; simulation processing

等基圆曲线齿锥齿轮(下文简称等基圆锥齿轮)是与格里森、奥利康等齿制不同的一种新型曲线齿锥齿轮。通过控制刀具和轮坯的相对运动,使齿轮的螺旋角按特定规律变化,保证所加工的锥齿轮不同锥距处当量齿轮的基圆半径不变,即齿廓形状不变,从理论上保证了可以使用一把铣刀精确加工整个齿面,而且根据需要可以设计成收缩齿或等高齿^[1]。其加工刀具结构简单、不需要专用机床,极大地降低了曲线齿锥齿轮的加工成本。现有理论及相关文献中,对于该齿轮的研究都是基于指形铣刀加工^[2]。指形铣刀由于其加工齿顶和齿根部分的刀具直径变化大,导致其切削线速度悬殊,齿面整体质量难以控制;在其刀尖部分,由于刀具直径非常小,实际加工中很容易断刀。而盘形铣刀固有的整体式结构决定了刀具的高刚性,其进给速度快于指形铣刀,故其效率较高;指形铣刀由于其尺寸小,很难做成硬质合金切削刀具,而盘形铣刀通过机夹、焊接的方式容易做成硬质合金切削刀的刀具。硬质合金刀刃的切削线速度数倍于高速钢刀刃,决定了其效率较高。使用平底、罐形、盘形铣刀加工格里森齿制螺旋锥齿轮的研究近年来已有突破,国内外都已研发出了专用设备,但鲜见针对等基圆锥齿轮的盘形铣刀加工方法的研究,据此本文提出了使用盘形铣刀加工等基圆锥齿轮的方法。

本文从研究盘形铣刀加工等基圆锥齿轮的共轭曲线出发,在保证加工所得齿面的等基圆特性不变的条件下,通过刀具空间位置、姿态的合理规划,使得盘形铣刀加工的齿面接近理论齿面,最终达到了齿面精加工的要求。

1 盘形铣刀加工等基圆锥齿轮的可行性

根据等基圆锥齿轮理论^[2],使用指形铣刀加工等基圆锥齿轮时,每一瞬时刀具和齿面都有一条共轭的空间接触线(理论共轭曲线),这样一条条的接触线就包络成了齿面。等基圆锥齿轮的特点有二:其一,齿线是一条特定的曲线;其二,在任意锥距处法面齿廓的当量基圆半径相等。由于指形铣刀与齿面的瞬时共轭接触线只是处于刀具轴截面附近,并非完全就是刀具的轴截面,因而只是在一定精度内保证了任意锥距处法面齿廓的当量

基圆半径相等,加之该方法本身就属于仿形加工,因此使用盘形铣刀加工这种齿轮就有可能实现。

使用盘形铣刀加工等基圆锥齿轮时,齿面同样也是由一条瞬时共轭接触线包络而成。如果通过刀具几何参数、刀具与轮坯的相对运动关系的合理设计,使得此时的共轭接触线接近理论共轭曲线,齿线也满足等基圆锥齿轮的特点,就可以实现盘形铣刀加工等基圆锥齿面。等基圆锥齿轮齿线的特点通过刀具运动易于实现^[3-7]。分别使用指形铣刀和盘形铣刀加工等基圆锥齿轮时,由于刀具曲面本身的差异,瞬时共轭接触线虽然十分接近,但理论上必然不同,所以如何使得盘形铣刀的瞬时共轭接触线接近指形铣刀的瞬时共轭接触线就是问题的关键所在,只有这样才能保证任意锥距处法面齿廓当量基圆半径相等这一特点。

当刀具分别沿着自身坐标系的X轴有微量回转或无回转时,两种情况下的理论共轭曲线与实际共轭曲线位置变化关系如图1所示,研究发现,刀具进行合理回转时的实际共轭曲线趋近理论共轭曲线。

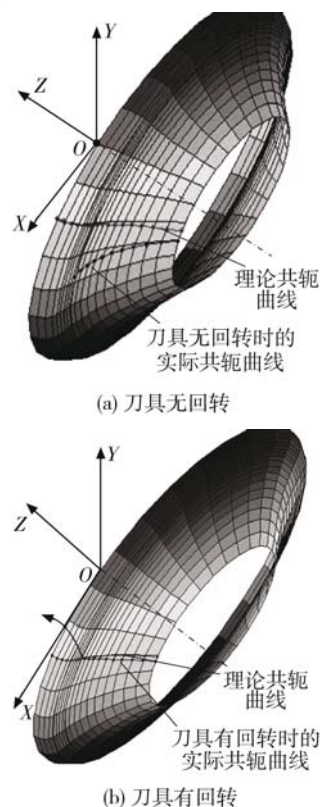


图1 刀具有/无回转时的共轭曲线图
Fig. 1 Conjugate curves scheme when tool rotation/no rotation

如果在刀具坐标系 XOZ 平面内的 X 轴上取一点 O_1 , 刀具以 O_1 为中心在 XOZ 平面内整体倾斜 α 角度、或不倾斜, 两种情况下的理论共轭曲线与实际共轭曲线位置变化关系如图 2 所示, 显然刀具进行适当的倾斜, 实际共轭曲线趋近理论共轭曲线。

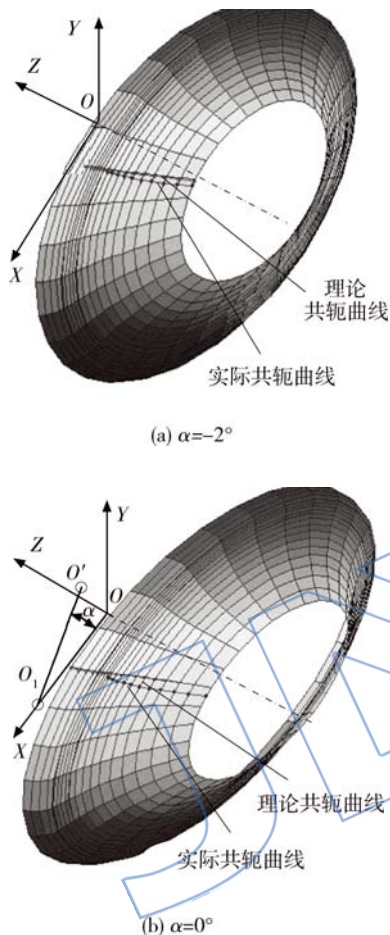


图2 刀具有/无倾斜时的共轭曲线图

Fig. 2 Conjugate curves scheme when tool tilt/no tilt

当刀具的倾斜回转中心点 O_1 距离刀具廓形辅助坐标系原点 O_n [2] 的距离取不同值时, 理论共轭曲线与实际共轭曲线位置变化关系如图 3 所示, 显然倾斜距离 c 选取适当时, 实际共轭曲线也会趋近理论共轭曲线。

上述 3 个参数对共轭曲线的影响并非独立, 实际计算时, 需要以两种共轭曲线无限接近为目标, 对 3 个参数进行优化 [8-10], 合理选取。分析可见, 通过刀具运动、刀具空间姿态的合理设计, 使用盘形铣刀加工等基圆锥齿轮有其可行性。再加上刀具廓线修形、齿线修形, 可以实现这一目标。

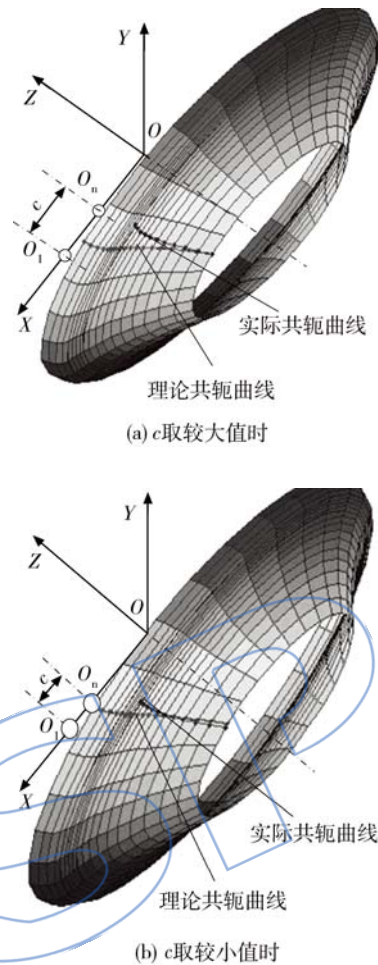


图3 倾斜中心不同时的共轭曲线图

Fig. 3 Conjugate curves scheme when tilt center changed

2 盘形铣刀模型构建

用盘形铣刀加工等基圆锥齿轮时, 依据等基圆锥齿轮理论, 刀具参加切削的刀刃轴截形按当量直齿圆柱齿轮的齿廓设计, 如图 4 中左图所示。刀具辅助坐标系 $\sigma_n(i_n, j_n)$ 的原点 O_n 是刀具坐标

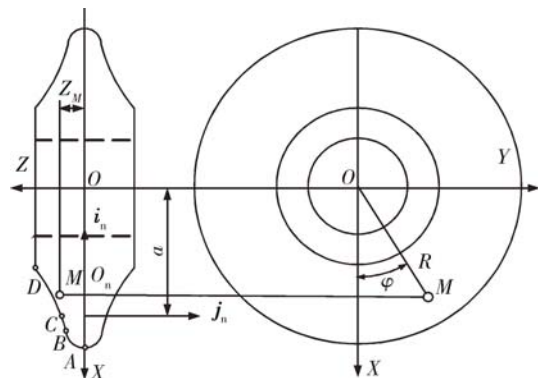


图4 盘形铣刀数学模型

Fig. 4 Disc cutter mathematical model

系 $\sigma(X, Y, Z)$ 的 XOY 平面和当量直齿圆柱齿轮分度圆的交点. 设已知回转面在刀具坐标系中的方程式为 $X = R \cdot \cos \varphi$; $Y = R \cdot \sin \varphi$; $Z = f(R)$, 结合等基圆锥齿轮理论^[1], 可求得刀具曲面的方程为

$$\begin{cases} X = [-r_k \cos(\tau_k + \frac{s_k}{r_k}) + r_v + a] \cdot \cos \varphi \\ Y = [-r_k \cos(\tau_k + \frac{s_k}{r_k}) + r_v + a] \cdot \sin \varphi \\ Z = \pm r_k \sin(\tau_k + \frac{s_k}{r_k}) \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中“+”用于右旋凸齿面、左旋凹齿面; “-”用于右旋凹齿面、左旋凸齿面; $r_k = r_{vb} / \cos \alpha_k$; $s_k = s_{k0} / l_{k0}^2 (r_v - r_k)^2$; $\tau_k = \pi/2 z_{vj} - \text{inv } \alpha_n + \text{inv } \alpha_k$; r_v 为当量齿轮分度圆半径(mm); a 为盘形铣刀轴线到辅助坐标系 σ_n 原点 O_n 的距离(mm); φ 为半径 R 与 XOZ 平面的夹角($^\circ$). r_{vb} 为等基圆锥齿轮任意锥距处当量齿轮的基圆半径; α_k 为角度自变量^[1]($^\circ$); z_{vj} 为锥距 R_j 处当量齿轮的当量齿数; α_n 为齿廓法面压力角($^\circ$); l_{k0} 为齿廓修形参考点到修形中心点的距离(mm); s_{k0} 为 l_{k0} 处齿廓修形量(mm).

3 切齿坐标系

3.1 切齿坐标系的建立

根据等基圆锥齿轮理论, 建立如图5所示的切齿坐标系^[11-16]. 当盘形铣刀由大端向小端以一

定的速度运动时, 轮坯按特定规律变速回转, 使刀具辅助坐标系 σ_n 的原点 O_n 始终处于分锥齿线的等距线上; 根据刀具瞬时位置的不同, 刀具绕着 j_d 轴进行 α 角度的倾斜; 同时, 刀具绕着 i_e 轴进行 γ 角度的回转, α, γ 角度的大小依据螺旋角 β 的大小按照一定规律变化.

1) 固定坐标系 $\sigma_o(i_o, j_o, k_o)$: 用于实现 σ_i 与 σ_c 之间的坐标变换, 原点 O_o 与轮坯坐标系的原点 O_i 重合, 切齿过程中, 辅助坐标系 $\sigma_n(i_n, j_n)$ 的原点 O_n 始终位于图5中的 $i_o O_o k_o$ 平面内.

2) 轮坯坐标系 $\sigma_i(i_i, j_i, k_i)$: 固联于轮坯的坐标系, 原点 σ_i 位于顶锥, 理论齿线的大端位于 $i_i O_i k_i$ 平面内.

3) 过渡坐标系 $\sigma_c(i_c, j_c, k_c)$: 该坐标系的原点 O_c 与刀具轴截形上的点 O_n 始终重合. 原点 O_c 位于分锥母线上, 刀具轴线方向上的么矢 i_c 垂直于分锥母线, j_c 与 j_o 平行. 原点 O_c 与 O_o 的距离为 R_c , O_c 在 σ_o 中的径向矢量为

$$R_c = R_c (\sin \delta i_c + \cos \delta k_c) \quad (2)$$

$$R_c = \sqrt{R^2 + (r_0 - s)^2 \pm 2R(r_0 - s) \sin \beta} \quad (3)$$

式中的“+”用于凹齿面, “-”用于凸齿面; r_0 为理论齿线与其等距线之距离(mm); s 为沿理论齿线法向修形量(mm); δ 为齿轮分锥角($^\circ$); β 为对应于 R 处的齿线螺旋角($^\circ$); R 为锥距(mm).

在冠轮平面内^[2], 由分锥齿线与冠轮平面内齿线的对滚关系, 轮坯坐标系的 j_i 轴与固定坐标系的 i_o 轴的夹角为 $e = \theta_c / \sin \delta$. θ_c 为冠轮平面内的刀具中心极角^[2].

4) 中间坐标系 $\sigma_d(i_d, j_d, k_d)$: 过渡坐标系 σ_c 沿着 i_c 平移距离 c 得到的坐标系. c 有正负之分, 图5所示是 c 取负值时的情况.

5) 倾斜坐标系 $\sigma_e(i_e, j_e, k_e)$: 中间坐标系 σ_d 绕着 j_d 回转 α 角得到的坐标系. α 角有正负之分.

6) 盘形铣刀定向坐标系 $\sigma_f(i_f, j_f, k_f)$: 倾斜坐标系 σ_e 沿 i_e 轴平移了距离 $a - c$, 旋转后的坐标系.

7) 盘形铣刀坐标系 $\sigma_g(i_g, j_g, k_g)$: 由坐标系 σ_f 绕着 i_f 进行 γ 角度回转得到的坐标系, 该坐标系即图4中的刀具坐标系 $\sigma(X, Y, Z)$ 在切齿时的坐标系.

8) 坐标系之间的变换矩阵

$$\sigma_o \rightarrow \sigma_i: M_{io} = \begin{bmatrix} \sin e & -\cos e & 0 \\ \cos e & \sin e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\sigma_c \rightarrow \sigma_o: M_{oc} = \begin{bmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta \end{bmatrix} \quad (5)$$

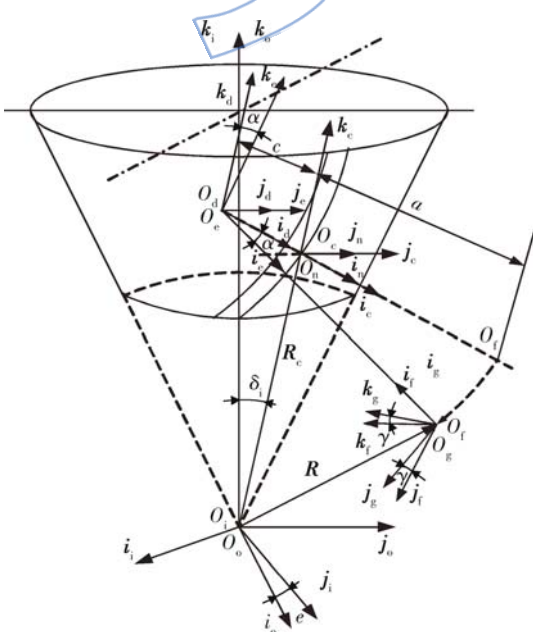


图5 盘形铣刀加工坐标系

Fig. 5 Coordinate for processing of disc cutter

$\sigma_c \rightarrow \sigma_d$: 仅仅是平移了距离 c 而已.

$$\sigma_d \rightarrow \sigma_c: M_{cd} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\sigma_c \rightarrow \sigma_f: M_{fc} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

平移距离 $a - c$. (7)

$$\sigma_f \rightarrow \sigma_g: M_{gf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (8)$$

3.2 刀位修正

c 分别取正负值时, 过渡坐标系 σ_c 、中间坐标系 σ_d 、倾斜坐标系 σ_e 三者之间的位置关系如图 6 所示. 当 $c > 0$ 时, 中间坐标系 σ_d 绕着其 j_d 回转 α 角形成倾斜坐标系 σ_e 后, 坐标原点 O_c 回转至 O_{c0} 点, 延长点 O_d 到 O_{c0} 的连线, 与轮坯分锥母线交于 O_1 点. 在过渡坐标系 σ_c 中, 坐标原点 O_c 在其 k_c 方向偏移的距离为: $O_c O_1 = c \tan \alpha$; 由于 α 角度极小, 在 i_c 方向偏移的距离小于 0.003 mm , 转化到对齿面的影响就更小, 为了简化计算, 在 i_c 方向的偏移不考虑. 对于坐标原点 O_c 在其 k_c 方向的偏移需要进行刀具位置修正. $c < 0$ 时, 点 O_c 偏移至 O_2 点, 此时点 O_c 的修正方向正好相反.

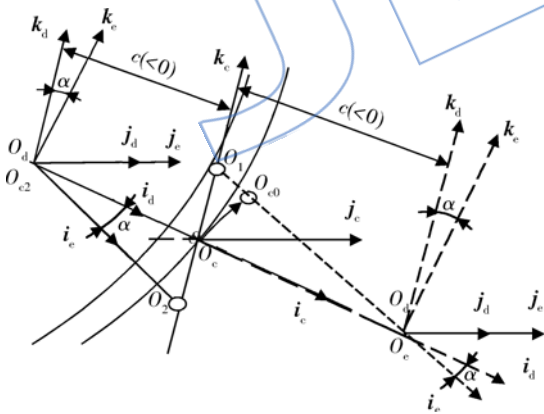


图 6 坐标系关系示意图

Fig. 6 Coordinate relationship diagram

4 齿面方程求解

4.1 刀具曲面单位切向矢量及法向矢量

铣刀坐标系 σ_g (或图 4 中的坐标系 σ) 下, 刀具廓形的 CD 段构成的回转曲面方程为

$$r_c = X \cdot i_g + Y \cdot j_g + Z \cdot k_g \quad (9)$$

上式是以 α_k , φ 为参数的回转曲面, 其参数曲线

的方向即为其主方向, 对应于主方向的单位切向矢量分别是 g_{11} , g_{22} . 为了保证啮合分析时大轮和小轮的啮合点处法向矢量相同, 即 $n_1 = n_2$, 小轮刀具曲面第一主方向 g_{11} 取参数曲线 α_k 的正向, 大轮刀具曲面第一主方向 g_{21} 取参数曲线 α_k 的负向; 大轮和小轮刀具曲面的第二主方向 g_{12} , g_{22} 均为参数曲线 φ 的正向, 切向矢量与法向矢量的设置如图 7.

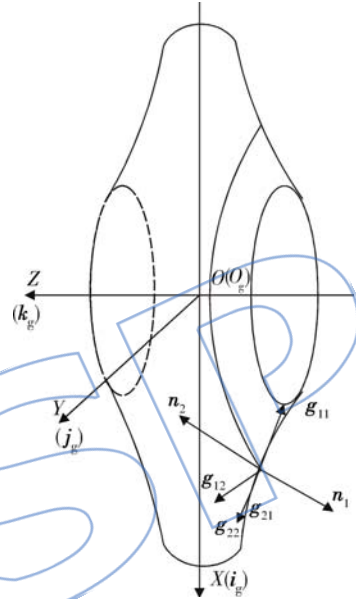


图 7 刀具曲面切向矢量与法向矢量

Fig. 7 Tangential vector and normal vector of cutter

4.1.1 第一主方向切向矢量 g_{11} 求解

把式(1)代入式(9), 所得曲面方程对 α_k 求导

$$g_{11} = (-1)^{(i-1)} \frac{\partial r_c}{\partial \alpha_k} \bigg/ \left| \frac{\partial r_c}{\partial \alpha_k} \right| =$$

$$(-1)^{(i-1)} \left(\frac{A_4 \cos \varphi}{\sqrt{A_4^2 + A_3^2}} i_g + \right.$$

$$\left. \frac{A_4 \sin \varphi}{\sqrt{A_4^2 + A_3^2}} j_g + \frac{A_3}{\sqrt{A_4^2 + A_3^2}} k_g \right) \quad (10)$$

式(10)中 $i = 1, 2$.

$$A_1 = \tan^2 \alpha_k \pm 2 s_{k0} \left(r_v - \frac{r_{vb}}{\cos \alpha_k} \right) \frac{\tan \alpha_k}{l_{k0}^2} \pm$$

$$s_{k0} \left(r_v - \frac{r_{vb}}{\cos \alpha_k} \right)^2 \frac{\sin \alpha_k}{l_{k0}^2 r_{vb}}$$

式中“ $\pm$ ”的“ $+$ ”用于凹齿面, “ $-$ ”用于凸齿面.

$$A_2 = \pm \left[\frac{-\pi}{2 z_{vj}} + \text{inv } \alpha_n - \text{inv } \alpha_k - \right.$$

$$\left. s_{k0} \left(r_v - \frac{r_{vb}}{\cos \alpha_k} \right)^2 \frac{\cos \alpha_k}{l_{k0}^2 r_{vb}} \right]$$

式中“ $\pm$ ”的“ $+$ ”用于凹齿面, “ $-$ ”用于凸齿面.

$$A_3 = \pm \frac{r_{vb} \sin A_2 \sin \alpha_k}{\cos^2 \alpha_k} \pm \frac{r_{vb} A_1 \cos A_2}{\cos \alpha_k}$$

式中“±”中的“+”左旋齿面,“-”用于右旋齿面。

$$A_4 = -\frac{r_{vb} \cos A_2 \sin \alpha_k}{\cos^2 \alpha_k} + \frac{r_{vb} A_1 \sin A_2}{\cos \alpha_k}$$

4.1.2 第二主方向切向矢量 $\mathbf{g}_2$ 求解

把式(1)代入式(9),所得曲面方程对 φ 求导

$$\mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \varphi} \bigg/ \left| \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \varphi} \right| = \frac{-A_5 \sin \varphi}{\sqrt{A_5^2}} \mathbf{i}_g + \frac{A_5 \cos \varphi}{\sqrt{A_5^2}} \mathbf{j}_g \quad (11)$$

式(11)中

$$A_5 = \frac{-r_{vb}}{\cos \alpha_k} \cos \left[\pm \frac{\pi}{2 z_{vj}} \pm (-\operatorname{inv} \alpha_n) \pm \operatorname{inv} \alpha_k \pm s_{k0} \left(r_v - \frac{r_{vb}}{\cos \alpha_k} \right)^2 \frac{\cos \alpha_k}{l_0^2 r_{vb}} \right] + r_v + a$$

式中“±”中的“+”用于凸齿面,“-”用于凹齿面。

4.1.3 刀具曲面的法向矢量 $\mathbf{n}_i$ 求解

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{g}_{i1} \times \mathbf{g}_{i2} \quad (12)$$

将式(10)、式(11)代入式(12),即可得到在铣刀坐标系 σ_g 下的刀具曲面法向矢量

$$\mathbf{n}_i = (-1)^{(i-1)} \cdot \frac{A_3 A_5 \cos \varphi \mathbf{i}_g + A_3 A_5 \sin \varphi \mathbf{j}_g + A_4 A_5 \mathbf{k}_g}{\sqrt{A_4^2 + A_3^2} \sqrt{A_5^2}} \quad (13)$$

4.2 刀具表面点的速度 $\mathbf{v}_{gd}$

在切齿的过程中,坐标原点 O_c 匀速地从大端向小端移动,速度为 $d\mathbf{R}_c/dt$ 。因刀具曲面是回转曲面,刀具切齿过程中的转动对问题的分析没有影响,为了简化计算,取点 O_c 的速度为刀具中心 O_0 点平动速度。在图5的过渡坐标系坐标系 σ_c 下,点 O_c 的移动速度为

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{R}_c}{dt} = \frac{dR_c}{dt} \mathbf{k}_c \quad (14)$$

然后依次转换到坐标系 $\sigma_d, \sigma_e, \sigma_f$ 下,最终转换至盘形铣刀坐标系 σ_g 下的移动速度为

$$\mathbf{v}_{gd} = \mathbf{M}_{gf} \mathbf{M}_{fe} \{ \mathbf{M}_{cd} (\mathbf{v}_c + [-c, 0, 0]^T) + [a - c, 0, 0]^T \} \quad (15)$$

将式(6)~式(8)、式(14)代入式(15),计算化简后得

$$\mathbf{v}_{gd} = (a \cos \alpha - \frac{D_5}{2} \sin \alpha + a - c) \mathbf{i}_g + (a \sin \alpha + \frac{D_5}{2} \cos \alpha) (\cos \gamma \mathbf{j}_g - \sin \gamma \mathbf{k}_g) \quad (16)$$

式中

$$D_0 = \frac{2 s_0 v (R - R_m)}{l_0^2 \cos^2 \beta_m} \quad D_1 = 1 - \frac{R \cos^2 \beta_e}{R_e} \\ D_2 = \frac{v}{R} + \frac{v D_1 R_e}{R^2 \cos^2 \beta_e} \quad D_3 = \frac{D_1 R_e}{R \cos^2 \beta_e}$$

$$D_4 = 1 + D_3 \quad D_5 = r_0 - \frac{s_0 (R - R_m)^2}{l_0^2 \cos^2 \beta_m}$$

$$D_6 = (-2Rv + 2D_5 D_0 \pm 2 \frac{v D_5 D_3^{1/2}}{D_4^{1/2}} \pm$$

$$2RD_0 \frac{-D_3^{1/2}}{D_4^{1/2}} \pm \frac{-RD_5 D_2}{D_3^{1/2} D_4^{1/2}} \pm \frac{RD_5 D_3^{1/2} D_2}{D_4^{3/2}}) / (R^2 + D_5^2 \pm \frac{2RD_5 D_3^{1/2}}{D_4^{1/2}})^{1/2}$$

式中 v 为刀具移动速度(mm/s);“±”的“+”用于凸齿面,“-”用于凹齿面。 R_e 为大端锥距(mm); R_m 为平均锥距(mm); β_m 为中点螺旋角(°); l_0 为齿线修形参考点到修形中心点的距离(mm); s_0 为 l_0 处齿线修形量(mm); β_e 为大端螺旋角(°)。

4.3 齿面点速度 $\mathbf{v}_{gc}$ 求解

4.3.1 固定坐标系 σ_0 下轮坯的瞬时角速度 ω_k

在冠轮平面上,当刀具以速度 $d\mathbf{R}_c/dt$ 沿径向移动的过程中,冠轮以速度 ω_k 回转,保证了刀具中心的轨迹是齿线的等距线。由 $\theta_c = \theta \pm \theta_d^{[1]}$ 得冠轮角速度 $\omega_k = d\theta_c/dt$ 。根据冠轮平面上齿线和对锥的对滚关系,当刀具位于 R_c 处时,轮坯的瞬时角速度 ω_k 为

$$\omega_k = \frac{d\theta_c}{dt} \mathbf{k}_0 = \left\{ \frac{D_2}{D_3^{1/2} \sin \delta} - \frac{D_2}{D_3^{1/2} D_4 \sin \delta} \pm \left[\frac{-D_0}{D_8^{1/2} D_4^{1/2}} + \frac{D_5 D_7}{D_8^{3/2} D_4^{1/2}} + \frac{D_5 D_2}{2 D_8^{1/2} D_4^{3/2}} \right] / \left[\left(1 - \frac{D_5^2}{D_8 \times D_4} \right)^{1/2} \sin \delta \right] \right\} \mathbf{k}_0 \quad (17)$$

式中“±”的“+”用于凸齿面,“-”用于凹齿面。

$$D_7 = -Rv + D_5 D_0 \pm \frac{v D_5 D_3^{1/2}}{D_4^{1/2}} \pm$$

$$R \frac{-D_0 D_3^{1/2}}{D_4^{1/2}} \pm \frac{-RD_5 D_2}{2 D_3^{1/2} D_4^{1/2}} \pm \frac{RD_5 D_3^{1/2} D_2}{2 D_4^{3/2}}$$

式中“±”中“+”用于凸齿面,“-”用于凹齿面。

$$D_8 = R^2 + D_5^2 \pm \frac{2RD_5 D_3^{1/2}}{D_4^{1/2}}$$

式中“±”中“+”用于凹齿面,“-”用于凸齿面。

4.3.2 固定坐标系 σ_0 下刀具曲面向量 $\mathbf{r}_0$

设 $\mathbf{R}_c$ 为 R_c 在固定坐标系的向量形式,则

$$\mathbf{R}_c = [R_c \sin \delta \quad 0 \quad R_c \cos \delta] \quad (18)$$

根据前面求得的结果,易得盘刀坐标系 σ_g 下的刀具曲面向量 $\mathbf{r}_g = [X, Y, Z]$, 然后将其依次分别转换到坐标系 $\sigma_f, \sigma_e, \sigma_d, \sigma_c$ 下,最终转换至空间固定坐标系 σ_0 下,此时的刀具曲面向量为

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_c + \mathbf{M}_{oc} \{ \mathbf{M}_{dc} (\mathbf{M}_{ef} \mathbf{M}_{fg} \mathbf{r}_g + [a - c, 0, 0]^T) + [a, 0, 0]^T \} \quad (19)$$

将式(1)、式(2)、式(5)~式(8)代入式(19),

计算化简后的刀具曲面向量为

$$\mathbf{r}_o = EE_1 \mathbf{i}_o + EE_2 \mathbf{j}_o + EE_3 \mathbf{k}_o \quad (20)$$

式中

$$EE_1 = \left\{ \left[R^2 + D_5^2 \pm \frac{2RD_5 D_3^{1/2}}{(1 + D_3)^{1/2}} \right]^{1/2} + \right. \\ \left. \tan \alpha \right\} \sin \delta + \cos \delta (E_1 \cos \alpha + E_3 \sin \alpha + c) + \\ \sin \delta (-E_1 \sin \alpha + E_3 \cos \alpha)$$

式中“±”中“+”用于凹齿面,“-”用于凸齿面。

$$EE_2 = -E_2 \sin \gamma \sin \varphi \pm E_1 \cos \gamma$$

式中“±”中“+”用于右旋齿面,“-”用于左旋齿面。

$$EE_3 = \left\{ \left[R^2 + D_5^2 \pm \frac{2RD_5 D_3^{1/2}}{(1 + D_3)^{1/2}} \right]^{1/2} + \right. \\ \left. \tan \alpha \right\} \cos \delta - \sin \delta (E_1 \cos \alpha + E_3 \sin \alpha + c) + \\ \cos \delta (-E_1 \sin \alpha + E_3 \cos \alpha)$$

式中“±”中“+”用于凹齿面,“-”用于凸齿面。

$$E_1 = \frac{r_{vb} \sin A_2}{\cos \alpha_k}$$

$$E_2 = -\frac{r_{vb} \cos A_2}{\cos \alpha_k} + r_v + a$$

$$E_3 = -E_2 \cos \gamma \sin \varphi - E_1 \sin \gamma$$

$$E_4 = -E_2 \cos \varphi + a - c$$

4.3.3 盘形铣刀坐标系下,齿面点速度向量 $\mathbf{v}_{gc}$

根据上面求得的 $\omega_b, \mathbf{r}_o$, 易求得固定坐标系 σ_o 下齿面一点的速度为

$$\mathbf{v}_o = \omega_b \times \mathbf{r}_o \quad (21)$$

再依次分别转换到坐标系 $\sigma_c, \sigma_d, \sigma_e, \sigma_f$ 下,最终转换至铣刀坐标系 σ_g 下,此时的齿面一点的速度为

$$\mathbf{v}_{gc} = \mathbf{M}_{gf} \mathbf{M}_{fe} \{ \mathbf{M}_{ed} (\mathbf{M}_{co} (\omega_b \times \mathbf{r}_o))^T + \\ [-c, 0, 0] \} - [a - c, 0, 0] \quad (22)$$

将式(5)~式(8)、式(17)、式(19)代入式(22),即可求得 $\mathbf{v}_{gc}$ 。

4.4 建立齿面方程并求解

在铣刀坐标系 σ_g 下,刀具曲面 $\Sigma^{(c)}$ 与齿面 $\Sigma^{(i)}$ 的接触点处相对速度 $\mathbf{v}_{ge}$ 为

$$\mathbf{v}_{ge} = \mathbf{v}_{gd} - \mathbf{v}_{gc} \quad (23)$$

将式(16)、式(22)代入式(23),即可求得 $\mathbf{v}_{ge}$ 。当刀具曲面 $\Sigma^{(c)}$ 与齿面 $\Sigma^{(i)}$ 共轭接触时,接触点处应满足啮合方程

$$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{v}_{ge} = 0 \quad (24)$$

将齿轮参数代入上式,得到的方程中有 $v, t, \varphi, \alpha_k, \gamma, \alpha$ 共6个变量, v, t 是和加工工艺有关的变量,它们的不同代表着刀具此时的位置 R 的不同。 φ, α_k 是描述刀具曲面上不同点的变量; γ, α

是确定刀具运动过程中回转和倾斜的变量,随着刀具位置 R 的不同而不同。

刀具位于 R 处时,变量 v, t, γ, α 已确定,给定一个 α_k 参数,求解上面的方程,即可得到一个 φ ,将 φ, α_k 代入式(1)即可求得盘形铣刀曲面 $\Sigma^{(c)}$ 上参数为 α_k 的一点与齿面 $\Sigma^{(i)}$ 的一个共轭接触点,给定不同的 α_k 值,即可得到该瞬时刀具曲面 $\Sigma^{(c)}$ 与齿面 $\Sigma^{(i)}$ 的一条接触线,对应于不同的刀具位置 R ,得到盘形铣刀坐标系中的瞬时接触线族,该接触线族在轮坯坐标系 σ_i 下构成了等基圆锥齿轮的齿面 r_i

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{M}_{io} \{ \mathbf{R}_c + \mathbf{M}_{oc} [\mathbf{M}_{de} (\mathbf{M}_{ef} \mathbf{M}_{fg} \mathbf{r}_g + \\ [a - c, 0, 0]) + [a, 0, 0]] \} \quad (25)$$

式(1)、式(3)、式(13)、式(15)、式(22)、式(24)和式(25)联立,即为轮坯坐标系下对应刀具 CD 段(图4)的齿面方程。对应于刀具 AB, BC 段的齿根过渡曲面方程同理可以求得。

5 验证

5.1 分析计算验证

针对一对等基圆锥齿轮,运用 MATLAB 软件,通过盘形铣刀在不同位置时接触线族的求解,构造了盘形铣刀加工理论下的三维等基圆锥齿轮的齿面。同时,在同一坐标系下构造了指形铣刀理论下的三维等基圆锥齿轮齿面,齿轮几何参数如表1所示。图8(a)是两种齿面在同一坐标系下分离的状态,图8(b)是两种齿面重合后的状态。虽然两种加工方法决定了两种齿面无法完全一样,但图中已经无法区分其不同,说明两种齿面已经十分接近。

表1 齿轮几何参数

Table 1 Geometrical parameters of gears

项目	小轮	大轮
齿数	22	27
旋向	左旋	右旋
轴交角/(°)	90	90
大端端面模数/mm	10	10
大端螺旋角/(°)	0	0
大端法向压力角/(°)	20	20
齿宽/mm	40	40

在齿面某相同几何位置时,两种加工方法得到的齿面点在齿面法向的截形如图9所示。

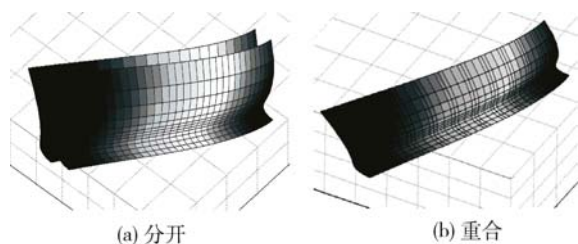


图8 两齿面造型

Fig. 8 Modelling figure of two kinds of tooth surface

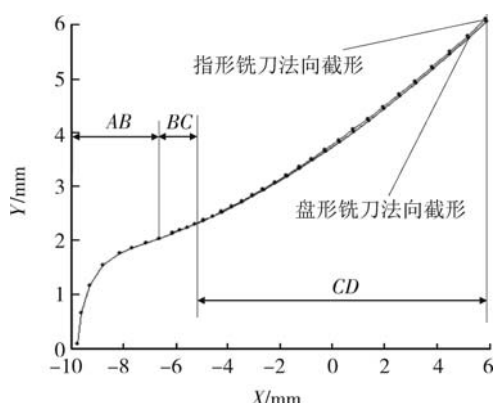


图9 两种齿面法向截形

Fig. 9 Normal direction section shape of two kinds of tooth surface

图9中AB、BC段为不参与啮合的齿根过渡部分,参与啮合的CD段截形坐标计算及误差如表2所示.根据表2,CD段中部两种齿面误差极小,CD段两端误差稍大,但都已经能满足工程要求.

图9和表2是两种齿面的局部截形对比,对两种齿面全齿面的分析计算如图10所示.图中粗实线表示理论齿面,细实线表示盘形铣刀加工的齿面高于理论齿面的部分,虚线表示盘形铣刀加工的齿面低于理论齿面的部分.由图可知,两种齿面在大端几乎完全重合,随着螺旋角的增大,误差增大.盘形铣刀加工的齿面和理论齿面对比,整体上呈扭曲状态,靠近齿根部分高出理论齿面,靠近齿顶部分低于理论齿面,齿面中部误差很小,盘形铣刀加工的齿面几乎和理论齿面重合,另外通过刀具轴截形修形,靠近齿根及齿顶部分的误差还可以减小,加之远离齿面参考中心的齿面不参与啮合,所以使用盘形铣刀能够精加工等基圆锥齿轮齿面.

5.2 仿真加工验证

根据上述等基圆锥齿轮的盘形铣刀加工方法,通过刀轴矢量、刀心位置的求解,根据数控加工后置处理理论,求得了五坐标数控加工的坐标

表达通式.在此基础上,运用VERICUT软件进行了仿真切削加工.图11所示是在通用五坐标数

表2 齿面法向坐标值及其误差(单位:mm)

Table 2 Coordinate values and error of normal direction of tooth surface (unit:mm)

法向坐标值		误差
指形铣刀	盘形铣刀	
6.1436	6.1102	0.0334
5.5961	5.5718	0.0243
5.2861	5.2706	0.0155
4.9213	4.9104	0.0109
4.5964	4.5901	0.0063
4.2833	4.2802	0.0031
4.0163	4.0152	0.0011
3.6671	3.6669	0.0002
3.5313	3.5354	-0.0041
3.3371	3.3452	-0.0081
3.1538	3.1664	-0.0126
2.9731	2.9902	-0.0171
2.8475	2.8711	-0.0236
2.7203	2.7491	-0.0288
2.6076	2.6411	-0.0335
2.5101	2.5498	-0.0397

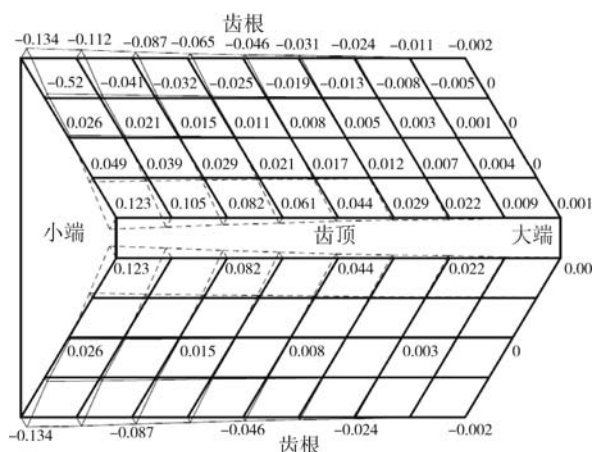


图10 理论齿面、实际齿面误差图(单位:mm)

Fig. 10 Error graph of theory tooth surface and actual tooth surface (unit:mm)

控机床上,使用盘形铣刀正在加工该齿面.

上述仿真加工,进一步验证了等基圆锥齿轮

的盘形铣刀加工理论的正确性,也证明在通用数控机床上,使用盘形铣刀加工等基圆锥齿轮的方法是可行的。



图 11 盘形铣刀仿真加工图

Fig. 11 Simulation processing figure for disc cutter

6 结 论

盘形铣刀加工理论下的等基圆齿面和指形铣刀加工理论下的等基圆齿面足够接近,所以两种齿面的微观几何特性基本相同,使用盘形铣刀能够精加工该齿面。该理论及方法为在通用数控机床上利用盘形铣刀高速高效铣削等基圆锥齿轮奠定了基础。

参考文献:

- [1] 蔡春源,程乃士.等基圆曲线齿锥齿轮原理:中国,91210712.X[P].1991-12-15.
- [2] 巩云鹏.等基圆曲线齿锥齿轮传动原理、强度分析与跑合仿真研究[D].沈阳:东北大学,1996.
GONG Yunpeng. Study on transmission theory, strength analysis and running-in simulation of equal base circle bevel gear[D]. Shenyang: Northeastern University, 1996. (in Chinese)
- [3] Huston R L, Coy J J. Ideal spiral bevel gears a new approach to surface geometry[J]. Journal of Mechanical Design, 1981, 103(1): 26-30.
- [4] 蔡春源,程乃士,胡进,等.等基圆曲线齿锥齿轮原理[J].机械工程学报,1992,28(3):61-64.
CAI Chunyuan, CHENG Naishi, HU Jin, et al. Principle of equal base circle bevel gear[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1992, 28(3): 61-64. (in Chinese)
- [5] 巩云鹏,张伟华,蔡春源,等.等基圆锥齿轮的齿面啮合特性分析[J].东北大学学报:自然科学版,1997,18(增刊):360-364.
GONG Yunpeng, ZHANG Weihua, CAI Chunyuan, et al. Analysis of gearing property of equal base circle bevel gear[J]. Journal of Northeastern University: Natural Science, 1997, 18(suppl.): 360-364. (in Chinese)
- [6] 张伟华,巩云鹏,王丹,等.等基圆锥齿轮的齿面几何与修形分析[J].东北大学学报:自然科学版,2000,21(4):390-393.
ZHANG Weihua, GONG Yunpeng, WANG Dan, et al. Analysis of tooth geometry and modification of equal base circle bevel gear[J]. Journal of Northeastern University: Natural Science, 2000, 21(4): 390-393. (in Chinese)
- [7] Lo C C. Efficient cutter-path planning for five-axis surface machining with a flat-end cutter[J]. Computer Aided Design, 1999, 31(9): 557-566.
- [8] GONG Yunpeng, DING Shichao, CAI Cunyuan. Analysis of tooth form error of equal base circle bevel gear[J]. Journal of Mechanical Engineering of China: English Edition, 1996, 18(1): 52-54.
- [9] 方宗德,曹雪梅,沈云波.弧线齿面齿轮的齿面设计与加工[J].航空动力学报,2010,25(1):224-227.
FANG Zongde, CAO Xuemei, SHEN Yunbo. Tooth surface design and manufacture for arcuate tooth trace face-gear[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(1): 224-227. (in Chinese)
- [10] 蔡香伟,方宗德,苏进展.弧线齿面齿轮的几何设计和数控加工[J].机械科学与技术,2012,31(11):1781-1785.
CAI Xiangwei, FANG Zongde, SU Jinzhan. Geometrical design and manufacture on NC machine for face gear with arcuate tooth[J]. Mechanical Science and Technology, 2012, 31(11): 1781-1785. (in Chinese)
- [11] Suh S H, Lee E S, Kim H C, et al. Geometric error measurement of spiral bevel gears using a virtual gear model for STEP-NC[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2002, 42(3): 335-342.
- [12] Litvin F L, Wang A G, Handschuh R F. Computerized generation and simulation of meshing and contact of spiral bevel gears with improved geometry[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 158(1): 35-64.
- [13] 王昱潭,李文彬,刘倩.球面圆弧锥齿轮接触点轨迹方程[J].农业工程学报,2012,28(3):65-69.
WANG Yutan, LI Wenbin, LIU Qian. Contact point trajectory equations of spherical arc bevel gears[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2012, 28(3): 65-69. (in Chinese)
- [14] WANG Fulin, YI Chuanyun, WANG Tao, et al. A generating method for digital gear tooth surfaces[J]. The International Journal Advanced Manufacturing Technology, 2006, 28(516): 474-485.
- [15] SUN Yuwen, XU Jinting, GUO Dongming, et al. A unified localization approach for machining allowance optimization of complex curved surfaces[J]. Precision Engineering, 2009, 33(4): 516-523.
- [16] Michalski J, Skoczylas L. A comparative analysis of the geometrical surface texture of a real and virtual model of a tooth flank of a cylindrical gear[J]. Journal of Materials Processing Technology, 2008, 204(1): 331-342.